CCJ

微积分 下

CALCULUS - PART II

华南理工大学 微电子学院 微电子科学与工程 20 级 CCJ

目录 TABLE OF CONTENTS

[无穷级数 INFINITE SERIES - 3 -]

无穷数列 INFINITE SEQUENCES - 3 -
无穷级数 INFINITE SERIES - 3 -
判别法 TESTS - 3 -
交错级数 ALTERNATING SERIES - 4 -
幂级数 POWER SERIES - 4 -

[圆锥曲线与极坐标 CONICS AND POLAR COORDINATES - 5 -]

坐标轴的平移与旋转 TRANSLATION AND ROTATION OF AXES - 5 -
平面曲线的参数方程 PARAMETRIC REPRESENTATION OF CURVES IN THE PLANE - 5 -
极坐标系 THE POLAR COORDINATE SYSTEM - 5 -
极坐标图像 GRAPHS - 5 -
极坐标微积分 CALCULUS - 6 -

[空间解析几何与向量代数 GEOMETRY IN SPACE AND VECTORS - 7 -]

向量的向量积 THE CROSS PRODUCT - 7 -
向量函数与曲线运动 VECTOR-VALUED FUNCTIONS AND CURVILINEAR MOTION - 7 -
三维空间的直线和曲线的切线 LINES AND TANGENT LINES IN THREE-SPACE - 7 -
曲率与加速度分量 CURVATURE AND COMPONENTS OF ACCELERATION - 8 -

[多元函数的微分 DERIVATIVES FOR FUNCTIONS OF TWO OR MORE VARIABLES - 9 -]

偏导数 PARTIAL DERIVATIVES - 9 -
梯度 GRADIENT - 9 -
方向导数 DIRECTIONAL DERIVATIVES - 9 -
链式法则 THE CHAIN RULE - 9 -
切平面及其近似 TANGENT PLANES AND APPROXIMATIONS - 9 -
最大值与最小值 MAXIMA AND MINIMA - 10 -
拉格朗日乘数法 THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS - 10 -

多重积分 MULTIPLE INTEGRALS - 11 -

二重积分化为二次积分 ITERATED INTEGRALS - 11 -
投影为非矩形区域的二重积分 DOUBLE INTEGRALS OVER NONRECTANGULAR REGIONS - 11 -
极坐标上的二重积分 DOUBLE INTEGRALS IN POLAR COORDINATES - 11 -
曲面面积 SURFACE AREA - 11 -
笛卡儿坐标系上的三重积分 TRIPLE INTEGRALS IN CARTESIAN COORDINATES - 11 -
柱面和球面坐标系上的三重积分 TRIPLE INTEGRALS IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL COORDINATES - 12 -

向量微积分 VECTOR CALCULUS - 13 -

向量场 VECTOR FIELD - 13 -
曲线积分 LINE INTEGRAL - 13 -
格林公式 GREEN'S THEOREM - 14 -
曲面积分 SURFACE INTEGRAL - 14 -
高斯公式 GAUSS'S THEOREM - 14 -
斯多克斯公式 STOKES'S THEOREM - 14 -

级数结论 - 15 -

无穷级数 INFINITE SERIES

无穷数列 INFINITE SEQUENCES

定义域为正整数集、值域是实数集的函数。

夹逼定理 SQUEEZE THEOREM：

假设$\{a_n\}, \{c_n\}$都收敛于L，同时对于任意的$n \geq K$（K是常量），有$a_n \leq b_n \leq c_n$，那么$\{b_n\}$也收敛于L。

单调数列定理 MONOTONY SEQUENCE THEOREM：

如果单调递增数列$\{a_n\}$的上限是 U，那么它将向一小于或等于U的极限A靠近。同样地，如果L是单调递减数列$\{b_n\}$的下限，数列$\{b_n\}$趋向一大于或等于L的极限B。

无穷级数 INFINITE SERIES

收敛级数的**线性性质** ***LINEARITY*** OF CONVERGENT SERIES

几何级数 GEOMETRIC SERIES：

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \ (a \neq 0)$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \ (|r| < 1)$$

消去级数 COLLAPSING SERIES：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+C_1)(k+C_2)} \ (C_1 \neq C_2 \cap C_1, C_2 \in N)$$

判别法 TESTS

第 N 项判别发散性法 ***NTH-TERM TEST*** FOR DIVERGENCE：

假如级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，那么$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，等价地，假如$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$或者$\lim_{n\to\infty} a_n$不存在，那么这个级数发散。**错误结论**：假如$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，那么这个级数收敛。（举例：调和级数 The Harmonic Series）

部分和有界判别法 ***BOUNDED PARTIAL SUMS***：

当且仅当一个正项级数的部分和有上界，这个正项级数$\sum a_k$收敛。

积分判别法 ***INTEGRAL TEST***：

假设f在区间$[1, \infty)$上是连续、正的、非递增函数，同时对于所有正整数k有$a_k = f(k)$。那么当且仅当反常积分$\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛时，无穷级数$\sum a_k$收敛。

P 级数判别法 ***P-SERIES TEST***：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$称为 p **级数**，如果$p>1$，p 级数收敛，如果$p\leq 1$，p 级数发散。

比较判别法 ***ORDINARY COMPARISON TEST***：

假如$0\leq a_n\leq b_n$对于$n\geq N$成立，如果$\sum b_n$收敛，则$\sum a_n$收敛；如果$\sum a_n$发散，则$\sum b_n$ 发散。

极限比较法 ***LIMIT COMPARISON TEST***：

$a_n\geq 0, b_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$，如果$0<L<\infty$，则$\sum a_n, \sum b_n$的敛散性相同；如果$L=0$且$\sum b_n$收敛，$\sum a_n$ 收敛。

比率判别法 ***RATIO TEST***：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$，如果$\rho<1$，则$\sum a_n$收敛；如果$\rho>1$，则$\sum a_n$ 发散；$\rho=1$时无法判断。

根判别法 ***ROOT TEST***：

$a_n>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=R$，如果$R<1$，则$\sum a_n$收敛；如果$R\geq 1$，则$\sum a_n$ 发散。

交错级数 ALTERNATING SERIES

交错级数的收敛判别法 ***ALTERNATING SERIES TEST***：

假如$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，那么这个级数收敛。

绝对收敛判别法 *ABSOLUTE CONVERGENCE* ***TEST***：

假如$\sum|a_n|$收敛，那么$\sum a_n$收敛。

绝对比率判别法 ***ABSOLUTE RATIO TEST***：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$，如果$\rho<1$，则$\sum a_n$收敛；如果$\rho>1$，则$\sum a_n$ 发散；$\rho=1$时无法判断。

条件收敛 *CONDITIONAL CONVERGENCE*：

假如$\sum a_n$收敛，但$\sum|a_n|$发散，则该级数条件收敛。

幂级数 POWER SERIES

收敛集 CONVERGENCE SET：

（1） 单独一点$x=a$，**收敛半径** – Radius of Convergence 为0；
（2） 区间$(a-R, a+R)$，可能包括端点，收敛半径为R；
（3） 整条实线，收敛半径为∞。

收敛集通过 A.R.T.（绝对比率判别法 ABSOLUTE RATIO TEST）判断：

$$\rho=f(x)\leq 1 \text{ or } \rho=f(x)<1\ \Rightarrow x\in\{\text{Convergence Set}\}$$

圆锥曲线与极坐标 CONICS AND POLAR COORDINATES

坐标轴的平移与旋转 TRANSLATION AND ROTATION OF AXES

坐标轴旋转：

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta,\quad y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

旋转角公式：

对于

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

有

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

平面曲线的参数方程 PARAMETRIC REPRESENTATION OF CURVES IN THE PLANE

二阶导：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

极坐标系 THE POLAR COORDINATE SYSTEM

与直角坐标系的关系：

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

极坐标图像 GRAPHS

心形线和蜗牛形曲线 Cardioid and Limacon：

$$r = a \pm b\cos\theta,\ \ r = a \pm b\sin\theta$$

双纽线/玫瑰曲线 Lemniscate：

$$r = \pm a\cos n\theta,\ \ r = \pm a\sin n\theta$$

花瓣数由n决定。

（对数）螺旋线 Spiral：

$$r = a\theta,\ \ r = ae^{b\theta}$$

极坐标微积分 CALCULUS

扇形面积：

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

一般区域积分：

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

切线斜率：

$$m = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta}{-f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

空间解析几何与向量代数

GEOMETRY IN SPACE AND VECTORS

向量的向量积 THE CROSS PRODUCT

当 $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ 时

$$\vec{u} \times \vec{v} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$

符合右手螺旋法则。

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$$

当 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ 时，$\vec{u} \parallel \vec{v}$。

向量函数与曲线运动 VECTOR-VALUED FUNCTIONS AND CURVILINEAR MOTION

向量函数：

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$$

速度：

$$\vec{v}(t) = f'(t)\vec{\imath} + g'(t)\vec{\jmath} + h'(t)\vec{k}$$

加速度：

$$\vec{a}(t) = f''(t)\vec{\imath} + g''(t)\vec{\jmath} + h''(t)\vec{k}$$

累积弧长：

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\vec{v}(t)\|\, dt$$

三维空间的直线和曲线的切线 LINES AND TANGENT LINES IN THREE-SPACE

过 (x_0, y_0, z_0)，与 $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ 平行的直线

参数方程：

$$x = x_0 + at\,, y = y_0 + bt\,, z = z_0 + ct$$

对称方程：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

空间曲线的方向向量：

$$\vec{r}'(t) = \langle f'(t) + g'(t) + h'(t) \rangle$$

曲率与加速度分量 CURVATURE AND COMPONENTS OF ACCELERATION

单位切向量：

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$$

曲率：

$$\kappa = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

若 $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath}$，

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

若 $y = g(x)$，

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

多元函数的微分

DERIVATIVES FOR FUNCTIONS OF TWO OR MORE VARIABLES

偏导数 PARTIAL DERIVATIVES

$$f_x(x, y, \dots) = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x}$$

梯度 GRADIENT

$$\nabla f(x, y, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \cdots = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \dots \rangle$$

方向导数 DIRECTIONAL DERIVATIVES

对于任意单位向量$\vec{u}$

$$D_{\vec{u}} f(x, y, \dots) = \vec{u} \cdot \nabla f(x, y, \dots) = u_1 f_x(x, y, \dots) + u_2 f_y(x, y, \dots) + \cdots$$

显然

$$D_{\vec{\imath}} f(x, y, \dots) = f_x(x, y, \dots)$$

$$D_{\vec{\jmath}} f(x, y, \dots) = f_y(x, y, \dots)$$

链式法则 THE CHAIN RULE

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

对于隐函数 - Implicit Function $F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

切平面及其近似 TANGENT PLANES AND APPROXIMATIONS

$F(x, y, z) = k$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$z = f(x, y)$ 在 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

对上式微分得到

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = \nabla f \cdot \langle dx, dy \rangle$$

最大值与最小值 MAXIMA AND MINIMA

最大值 – Maximum Value	最小值 – Minimum Value	极值 – Extreme Value
全局 – Global	局部 – Local	全局最大值 – Global Maximum Value

临界点 CRITICAL POINT：

（1） 边界点 Boundary Point
（2） 稳定点 Stationary Point
（3） 奇异点 Singular Point

二阶偏导检验法 ***SECOND PARTIALS TEST***：

假设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近有连续的二阶偏导数，并且$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$。令

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

（1） $D > 0$ 且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$， $f(x_0, y_0)$ 是极大值；
（2） $D > 0$ 且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$， $f(x_0, y_0)$ 是极小值；
（3） $D < 0$， $f(x_0, y_0)$ 不是极值（是鞍点）；
（4） $D = 0$ 无法判断。

拉格朗日乘数法 THE METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS

在条件 $g(\vec{p}) = 0$ 下，求 $f(\vec{p})$ 的最小值或者最大值，只需解方程组

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{p}) = \lambda \nabla g(\vec{p}) \\ g(\vec{p}) = 0 \end{cases}$$

求出 $\vec{p}$ 和 λ 。对于条件极值的问题，每一个点 $\vec{p}$ 都是一个临界点，对应的 λ 叫做**拉格朗日乘子 - Lagrange Multiplier**。

多重积分 MULTIPLE INTEGRALS

二重积分化为二次积分 ITERATED INTEGRALS

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

投影为非矩形区域的二重积分

DOUBLE INTEGRALS OVER NONRECTANGULAR REGIONS

Y 型区域 Y-SIMPLE SET：

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

X 型区域 X-SIMPLE SET：

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

技巧：改变积分次序。

极坐标上的二重积分 DOUBLE INTEGRALS IN POLAR COORDINATES

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面面积 SURFACE AREA

$$A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

笛卡儿坐标系上的三重积分 TRIPLE INTEGRALS IN CARTESIAN COORDINATES

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx$$

<u>柱面和球面坐标系上的三重积分</u>

<u>TRIPLE INTEGRALS IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL COORDINATES</u>

柱面坐标系与直角坐标系的关系：

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z,\ \ r^2 = x^2 + y^2$$

$$f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = F(r,\theta,z)$$

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} \int_{\psi_1(r,\theta)}^{\psi_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, rdzdrd\theta$$

球面坐标系与直角坐标系的关系：

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\varphi,\ \ r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_S f(\rho\sin\varphi\cos\theta, y\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi$$

向量微积分 VECTOR CALCULUS

向量场 VECTOR FIELD

向量函数：

$$\vec{F}(\vec{p}) = M\vec{\imath} + N\vec{\jmath} + \cdots$$

标量场的梯度 GRADIENT OF A SCALAR FIELD：

$$\vec{F}(x, y, \ldots) = \text{grad}\, f = \nabla f(x, y, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \cdots$$

$f(x, y, z)$ 是势函数 - Potential Function。

散度与旋度 DIVERGENCE AND CURL：

对于向量场

$$\vec{F}(x, y, z) = M\vec{\imath} + N\vec{\jmath} + P\vec{k}$$

散度

$$\text{div}\, \vec{F} = \nabla \cdot f = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

旋度

$$\text{curl}\, \vec{F} = \nabla \times f = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

曲线积分 LINE INTEGRAL

$$\int_C f(x, y, \ldots)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), \ldots)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + \cdots}\; dt$$

功 WORK：

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

或者

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

当 $\text{curl}\, \vec{F} = \vec{0}$ 或 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}$，$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$，$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ 时（即 $\vec{F}$ 是保守的 – Conservative）。

若 $\vec{F} = M\vec{\imath} + N\vec{\jmath}$ 则 $\text{curl}\, \vec{F} = \vec{0}$ 意味着 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 。

$$\int_C M dx + N dy + \cdots = \int_{(a,b,\ldots)}^{(c,d,\ldots)} M dx + N dy + \cdots = [f(x, y, \ldots)]_{(a,b,\ldots)}^{(c,d,\ldots)} = f(c, d, \ldots) - f(a, b, \ldots)$$

格林公式 GREEN'S THEOREM

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C Mdx + Ndy$$

若 $x = x(s),\ y = y(s)$,

单位切向量 UNIT TANGENT VECTOR：

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds}\vec{\imath} + \frac{dy}{ds}\vec{\jmath}$$

单位法向量 UNIT NORMAL VECTOR：

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{\imath} - \frac{dx}{ds}\vec{\jmath}$$

F 通过 C 的流量 FLUX OF F ACROSS C：

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S \operatorname{div}\vec{F}\,dA \ (\text{高斯散度公式 Gauss's Divergence Theorem})$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA \ (\text{斯多克斯公式 Stokes's Theorem})$$

曲面积分 SURFACE INTEGRAL

$$\iint_C g(x,y,z)\,dS = \iint_R g(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dydx$$

单位法向量 UNIT NORMAL VECTOR：

$$\vec{n} = \frac{\frac{x}{z}\vec{\imath} + \frac{y}{z}\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1}}$$

F 通过 G 的流量 FLUX OF F ACROSS G：

$$\iint_G \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_R \left(-Mf_x - Nf_y + P\right)dxdy$$

高斯公式 GAUSS'S THEOREM

$$\iint_{\partial S} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_{\partial S} (Mcos\alpha + Ncos\beta + Pcos\gamma)\,dS = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)dV = \iiint_S \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

斯多克斯公式 STOKES'S THEOREM

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

对于存在有向界限的圆 ∂S 的表面S，$\operatorname{curl}\vec{F}$ 的流量都是 2π。

级数结论

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, -1 < x \le 1$$

$$\tan^{-1} x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, -1 \le x \le 1$$

$$\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh x = \sum \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$(1+\mathrm{x})^p = \sum \binom{p}{n-1} x^{n-1} = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \cdots, -1 < x < 1$$